

16/03/15

1 Ασκησης Φυλλάδιο (2)

Ασκ (3) Έστω $a, b, n, m \in \mathbb{N}$ κ' έστω ότι $m \geq n$.

Τότε αν $a^n | b^m \xrightarrow{\text{vdo}} a | b$

Πέρι : Αν $a=1$, τότε προφανώς το $a=1 | b$

Έστω ότι $a > 1$. Τότε προφανώς $b > 1$ κ' άρα μπορούμε να θεωρήσουμε αντιστοιχία των $a, b \in \mathbb{N}$ πρώτων παραγόντων. Τότε μπορούμε να γράψουμε $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}$
 $\forall i \neq j, p_i \neq p_j$ κ' $\alpha_i, b_i \geq 0$.

$$\begin{aligned} 1 \leq i \leq k \\ \text{Είναι } a^n &= (p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k})^n = p_1^{\alpha_1 \cdot n} \dots p_k^{\alpha_k \cdot n} \\ b^m &= (p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k})^m = p_1^{b_1 \cdot m} \dots p_k^{b_k \cdot m} \end{aligned}$$

$$\text{Τότε : } p_1^{\alpha_1 \cdot n} \dots p_k^{\alpha_k \cdot n} \mid p_1^{b_1 \cdot m} \dots p_k^{b_k \cdot m}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \forall i=1, \dots, k : n \cdot \alpha_i &\leq m \cdot b_i \\ \text{Επειδή } m \leq n &\Rightarrow b_i \cdot m \leq n \cdot b_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow n \cdot \alpha_i \leq m \cdot b_i, \forall i=1, \dots, k$$

$$\begin{aligned} n &= p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \text{ τότε } \\ d | n &\Leftrightarrow d = p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k} \\ 0 &\leq b_i \leq \alpha_i, \\ i &= 1, \dots, k \end{aligned}$$



$$\Rightarrow a_i \leq b_i, \forall i=1, \dots, k$$

$$\text{Τότε όμως } a = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k} \mid b = p_1^{b_1} \cdot \dots \cdot p_k^{b_k}$$

! οχλεί η ανισότητα αν $n \neq m$; : 0x1!

$$\text{Αντικαθιστάμε: } a=4, n=2 \quad b=2, m=5 \quad \left. \begin{array}{l} (2 \neq 5) \\ \Rightarrow a^n = 4^2 = 16 \\ b^m = 2^5 = 32 \end{array} \right\} \Rightarrow a^n = 16 \nmid 32 = b^m$$

$$\text{ενώ } a = 4 + 2 = b.$$



Ασκ(4) : Έστω P πρώτος αριθμός

$$\textcircled{1} \text{ Av } k \in \mathbb{N} : k < P, \text{ τότε } P \mid \binom{P}{k}$$

$$\textcircled{2} m \in \mathbb{N} \text{ κ' } m < P \leq 2m, \text{ τότε } P \mid \binom{2m}{m}$$

$$\binom{P}{k} = \frac{P!}{k!(P-k)!} \in \mathbb{N}$$

$$\text{Λόγω: } \binom{P}{k} = \frac{P!}{k!(P-k)!} = r \in \mathbb{N} \Rightarrow P! = r \cdot k!(P-k)!$$

$$\text{Επειδή } P \mid P! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot P = r \cdot k! \cdot (P-k)! \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P \mid r \cdot k! \cdot (P-k)! \quad \left. \begin{array}{l} P: \text{πρώτος} \end{array} \right\} \Rightarrow P \mid r \text{ ή } P \mid k! \text{ ή } P \mid (P-k)!$$

$$\bullet \text{ Av } P \mid k! \Rightarrow P \mid 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k \Rightarrow P \mid \lambda, \text{ όπου } \lambda = 1, 2, \dots, k$$

P : πρώτος

$$\Rightarrow P \leq \lambda \leq k : \text{άρα το } \deltaιότι \text{ } (k < P)$$

$$\bullet \text{ Av } P \mid (P-k)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (P-k) \quad \left. \begin{array}{l} P: \text{πρώτος} \end{array} \right\} \Rightarrow P \mid \lambda \text{ όπου } \lambda = 1, \dots, P-k \Rightarrow$$

$\Rightarrow P \leq \lambda \leq P-k$ άρα το διότι $P-k < P$

• Άρα $P|r \Rightarrow P| \binom{P}{k}$

② $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!(2n-n)!} = \frac{2n!}{(n!)^2} \in \mathbb{N}$

• $2n! = r \cdot (n!)^2, r \in \mathbb{N}$

Επειδή $P \leq 2n \Rightarrow P|(2n)!$ $\left. \begin{array}{l} \Rightarrow P|r \cdot (n!)^2 \\ \text{Πρώτος} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{(από το Ευκλ.)}$

$\Rightarrow P|r \wedge P|(n!)^2$

• Αν $P|(n!)^2 = n! \cdot n!$ $\left. \begin{array}{l} \Rightarrow P|n! \\ \text{Πρώτος} \end{array} \right\} \Rightarrow P|\lambda, \lambda=1, \dots, n \Rightarrow P:\text{πρώτος}$

$\Rightarrow P \leq \lambda \leq n$ άρα ο διότι $P > n$.

• Επομένως $P|r = \binom{2n}{n}$, διότι $P|(n!)^2$



Άσκ 11: Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί με : ① 3 διαπρέτες
: ② 4 διαπρέτες.

Λύση: ① Έστω $n \in \mathbb{N}$ με 3 διαπρέτες. Τότε $n > 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, όπου $p_1, \dots, p_k$ ανά δυο διαφορε-
τικοί πρώτοι και $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 1$.

Αν $k \geq 2$. Τότε ο n θα έχει ως διαπρέτες (αυτοδιαπρέτες) τους : $1, n, p_1, p_2$
άρα ο n υποθέτουμε ότι έχει 3 διαπρέτες

Άρα $k=1 \Rightarrow n = p_1^{\alpha_1} \Rightarrow n = p_1^{\alpha_1}$. Αν $\alpha_1 \geq 3$ τότε ο n θα
έχει τους διαπρέτες : $1, n, p_1, p_2, \dots$ (αυτοδιαπρέτες) άρα ο n έχει 3 διαπρέτες. Άρα $1 \leq \alpha_1 \leq 2$.

Αν $\alpha_1 = 1 \Rightarrow$ ο n θα έχει διαπρέτες τους : $1, p_1 = n$.
άρα ο n έχει 2 διαπρέτες

Άρα $\alpha_1 = 2 \Rightarrow n = p_1^2$ που έχει 3 διαπρέτες τους : $1, p_1, p_1^2$
άρα ο n έχει 3 διαπρέτες

(b) $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, ηρωζηνίς ανάλυσις του n .

• Αν $(k=1)$, τότε $n = p_1^{\alpha_1}$

Τότε $(n = p_1^3)$

$\rightarrow \alpha_1 = 1 \Rightarrow n = p_1$ ηρώζης καί έχει διαίρετς τους 1, p_1 άνω

$\rightarrow \alpha_1 = 2 \Rightarrow p_1^2 = n$ έ έ διαίρετς τους 1, p_1, p_1^2 άνω

$\rightarrow \alpha_1 = 3 \Rightarrow n = p_1^3$ έ έ διαίρετς τους 1, p_1, p_1^2, p_1^3 : 4 διαίρετς.

$\rightarrow \alpha_1 \geq 4 \Rightarrow n = p_1^4$ έ έ διαίρετς 1, p_1, p_1^2, p_1^3, p_1^4 κ' διαίρετς ≥ 5 άνω

• Αν $(k=2) \Rightarrow n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$

Αν $\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \Rightarrow n = p_1 \cdot p_2$ κ' διαίρετς : 1, $p_1, p_2, p_1 \cdot p_2 = n$ (4 διαίρετς)

Αν $\alpha_1 \geq 2$ τότε εκτός από τους $p_1, p_2, 1, p_1 \cdot p_2$ θα έχουμε κ' άλλον διαίρετη p_1^2 : άνω. Όσοι α για $\alpha_2 \geq 2$.
Αρα $n = p_1 \cdot p_2$

• Αν $k \geq 3$ τότε $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \dots$ άνω διότι n έχει άνω από 4 διαίρετς διότι θα έχει τον άριστον τους : 1, $p_1, p_2, p_3, p_1 \cdot p_2, p_1 \cdot p_3, p_2 \cdot p_3, \dots$

Αρα όδοι οι αριθμοί έ 4 διαίρετς έχουν 2 μορφές
 $n = p_1^3, n = p_1 \cdot p_2$

Ασκ (8) : (i) Νό : $\sqrt{2}$: άρρητος, (ii) Αν $m, n > 1$ κ' $\sqrt{m}$: ρητός $\Rightarrow \sqrt{n}$: άρρητος.

Λύση : Έρω ότι $\sqrt{2}$ ρητός $\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b}$, όπου οι $a, b \in \mathbb{N}$ κ' χωρίς βλάβη της γενικότητας, προπαίτε να υποθέσουμε ότι οι a, b δεν έχουν κοινός διαίρετη.

τότε $2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow 2 \mid a^2 \Rightarrow 2 \mid a$ (1)

$2 \mid a \Rightarrow a = 2c$, για $c \in \mathbb{N}$, τότε $a^2 = (2c)^2 = 4c^2$
 $a^2 = 2b^2$ (2)

$$\Rightarrow b^2 = 2c^2 \stackrel{\text{2: } \pi\omega\omega\sigma}{\Rightarrow} 2|b^2 \Rightarrow 2|b \quad (2)$$

Από (1), (2) $\Rightarrow$ ~~2~~ 2 είναι κοινός διαιρέτης των a, b
Αποφάσιστε από των υποθέσεων που κάνετε!

Άρα 20 $\sqrt{2}$ είναι άρρητος!

(iii) Έστω $\sqrt[n]{m} = \frac{a}{b}$, όπου $a, b \in \mathbb{N}$ κ' χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι a, b δεν έχουν κοινό διαιρέτη.

$$\text{Είναι } (\sqrt[n]{m})^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \Rightarrow m = \frac{a^n}{b^n} \Rightarrow \boxed{a^n = m \cdot b^n} \quad (1)$$

Αν $b \neq \pm 1$ τότε ο b έχει έναν πρώτο διαιρέτη, έστω p

Τότε $p|b \Rightarrow p|m \cdot b^n = a^n$
 p : πρώτος $\Rightarrow p|a$ Αποφάσιστε από των υποθέσεων που κάνετε!

Διότι υποθ. ότι a, b δεν έχουν κοινό διαιρέτη

$$\text{Άρα } b = \pm 1 \Rightarrow \sqrt[n]{m} = \pm a \in \mathbb{Z}$$

Άσκ (12) (Πολύ χρήσιμο) (Κριτήριο Eisenstein): Έστω πολυώνυμο $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $i=1, \dots, n$, και είναι $a_n \neq 0$. Υποθέτουμε ότι $\exists p$: πρώτος

έτσι ώστε $p|a_0, p|a_1, \dots, p|a_{n-1}$, $p \nmid a_n$ κ' $p^2 \nmid a_0$

Τότε $f(t)$: άρρητος.

Αδεια: Υποθ. ότι $f(t)$ δεν είναι άρρητος $\Rightarrow$
 $\Rightarrow f(t) = g(t) \cdot h(t)$, όπου $g(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_s t^s$
όπου $s > 0$

κ' $h(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_r t^r$, όπου $r > 0$.

$$g(t) \cdot h(t) = b_0 \cdot c_0 + (b_0 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_0)t + (b_0 \cdot c_2 + b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_0)t^2 + \dots + (b_0 \cdot c_k + b_1 \cdot c_{k-1} + \dots + b_{k-1} \cdot c_1 + b_k \cdot c_0)t^k + \dots + b_s \cdot c_r \cdot t^{s+r}$$

